Tarea 7

Modelos Estocásticos

Fecha de entrega: Martes 28 de Noviembre de 2017 9:30 hrs.

1. Problemas

PROBLEMA 1. *Considere una población en la cual cada individuo tiene una cantidad aleatoria de descendientes* ξ *con función de probabilidad* $P(\xi = k) = p_k > 0$*, para* $0 \leq k \leq 2$ *y* $P(\xi = k) = 0$ *para* $k > 2$*.*

a) Calcule la función generadora de probabilidad $\phi(s)$ *de* ξ *para* $s \in [1, 1]$*.*

b) Si la población comienza con un individuo y X_n *es el tamaño de la* n*-ésima generación, demuestre que* X_n*,* $n \geq 0$ *es una cadena de Markov y clasifique los estados de esta cadena.*

c) Halle la media y la varianza de X_n *en términos de* p_k*,* $0 \leq k \leq 2$*.*

d) Bajo qué condiciones sobre p_0, p_1 *y* p_2 *es segura la extinción? Cuál es la probabilidad de extinción si la extinción no es segura?*

e) Sea $Z = \sum_{n=0}^{\infty} X_n$ *el tamaño total de la población (con* $X_0 = 1$*) que sigue la ley descrita anteriormente. Bajo la condición para extinción segura, halle el valor esperado de* Z*.*

PROBLEMA 2. *Sea* $(N_t)_{t \geq 0}$ *un proceso de Poisson de parámetro* λ*, y sean* s_1, s_2 *y* t *tiempos tales que* $0 < s_1 < s_2 < t$*. Demuestre que, condicionada al evento* $N_t = n$ *, la variable* $N_{s_2} - N_{s_1}$ *tiene distribución binonimal con parametros* n *y* $p = (s_2 - s_1)/t$*.*

PROBLEMA 3. *Sea* $(N_t)_{t \geq 0}$ *un proceso de Poisson de parámetro* λ*. Definimos el proceso el proceso* $R_t, t \geq 0$*, como* $R_t = 1$*, si* $N(t)$ *es par, y* $R_t = -1$*, si* $N(t)$ *es impar.*

a) Para t fijo, calcule la probabilidad de que $R_t = 1$*.*

b) Encuenre la distribución conjunta de R_t *y* $R_{t+s}, t, s \geq 0$*.*

c) Encuentra la función de covarianza del proceso, $K(t, s) = Cov(R_t, R_{t+s})$*.* $t, s \geq 0$*.*

PROBLEMA 4. *Sean* $T_1, T_2, \ldots$ *v.a. independientes geométricas con parámetro p. Y sea R(t), el proceso de renovación asociado.*

a) Para n y m enteros muestra que R(n+m)-R(m) y R(m) son independientes.

b) Muestre que R(t) se puede realizar como $N(\lfloor t \rfloor)$ *donde N(t) es un proceso de Poisson.*

c) Calcule la densidad de la parte fraccionaria de una variable exponencial.

d) (extra) Puedes contruir un proceso e Poisson a partir de R(t) y un conjunto de variables aleatorias uniformes independientes?.